

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ**  
**«ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»**  
**ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ**  
**ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Μαθηματικού**  
**Εφαρμογών**

ΑΘΗΝΑ 11/9/2008, ΩΡΑ: 15:00

*Κ. Στούρως*

**Θέμα 1<sup>ο</sup> :**

(α) Να λυθεί για την  $u(x,t)$  το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$u_t + cu_x + u^2 = 0, \quad u(x,0) = x, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (\text{Μον. 1.25})$$

(β) Αναγνωρίστε τη μορφή της μ. δ. ε. :  $u_{x_1 x_2} (x_1, x_2, x_3) = 0$  και στη συνέχεια επιλύστε την.  $u = c_1(x_1, x_2) \cdot x_3 + c(x_2, x_3)$  (Μον. 0.25)

(γ) Να προσδιοριστεί το  $A$  έτσι ώστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi, \quad 0 \leq \rho < 3, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi,$$

$$\left. \frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=3} = 5x_1 + A, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi,$$

$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{2\pi} (5 \cdot 3 \cos \varphi + A) 3 \, d\varphi$$

να είναι επιλύσιμο και στη συνέχεια να επιλυθεί. (Μον. 1.75)

*h2*

**Θέμα 2<sup>ο</sup> :**

Να βρεθεί η συνάρτηση Green του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\Delta u(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2} \sin x_1, \quad (x_1, x_2) \in (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty),$$

$$\left. \frac{\partial u(x_1, 0)}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = e^{-x_1^2} \sin x_1, \quad x_1 \in (-\infty, +\infty). \quad x_2 = 0$$

Να δοθεί η λύση του προβλήματος σε ολοκληρωτική μορφή.

Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον

$$\mathbb{R}^2 : E(x; x') = \frac{1}{2\pi} \ln[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2]^{1/2}, \quad x = (x_1, x_2). \quad (\text{Μον. 1.75})$$

**Θέμα 3<sup>ο</sup> : (2 μον.)**

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$x^2 y''(x) + 5xy'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 1 < x < e^\pi, \quad y(1) = y(e^\pi) = 0.$$

(β) Είναι η εξίσωση σε μορφή Sturm-Liouville; Να δώσετε τη σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από αυτό το πρόβλημα.

(Θεωρείστε γνωστή την τιμή  $\|y_n(x)\|_{2,r}$ .) *επειδή αγνοώ*

(γ) Να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$x^2 y''(x) + 5xy'(x) + \pi y(x) = \frac{1}{x^2}, \quad 1 < x < e^\pi, \quad y(1) = y(e^\pi) = 0.$$

(δ) Να αναπτύξετε σε γενικευμένη σειρά Fourier, ως προς τις

ιδιοσυναρτήσεις του (α), τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad 1 < x < e^\pi$ .

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται

$$\left( \frac{4\pi}{\pi} \right)^2$$

**Θέμα 4<sup>ο</sup> : (2 μον.)**

(A) (μ.1,3). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - \cos x, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x + 1 - \cos x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Δώστε μία φυσική ερμηνεία αν  $u = u(x,t)$  παριστάνει θερμοκρασία. \*

(B) (μ. 0,7). Να περιγράψετε τη μέθοδο επίλυσης (χωρίς να λύσετε) του μη-ομογενούς (ως προς την πηγή) προβλήματος:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = q(x,t) = (1-x)\sin t, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

4 σημεία

Στη συνέχεια, υποθέτοντας ότι γνωρίζετε τη λύση  $u = u(x,t)$ , να λυθεί το ομογενές (ως προς τη πηγή) πρόβλημα με χρονοεξαρτώμενες συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{cases} v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ v(0,t) = a(t) = \cos t, & v(1,t) = 0, t > 0, \\ v(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

λίγες φράσεις  
505

**Θέμα 5<sup>ο</sup> : (1 μον.)**

Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να λυθεί (σε ολοκληρωτική μορφή) το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u_x(x,t), u(x,t) \rightarrow 0, & \text{όταν } |x| \rightarrow \infty. \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

υπό ολοκληρωτική μορφή

→ Εφαρμογή όταν  $f(x) = T$ , σταθερά (κάντε αλλαγή μεταβλητών και χρήση του 6). Συμπίπτει το αποτέλεσμα με αυτό που αναμένεται διαισθητικά (να το αιτιολογήσετε); έχει μόνωσις, έχει ρηχή

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier. Δίνονται:

1.  $F\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{isx} dx = \hat{u}(s,t),$

2.  $F^{-1}\{\hat{u}(s,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s,t)e^{-isx} ds = u(x,t),$

3.  $F\left\{\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n}\right\} = (-is)^n \hat{u}(s,t),$

4.  $(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi,$

5.  $F^{-1}\{e^{-a^2 s^2 t}\} = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-x^2/4a^2 t},$

6.  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$

\*  
η φέρνει με ε2 από x  
η φέρνει με ε2 από x  
με η φέρνει με ε2 από x  
→ 1D πρόβλημα

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

3) Η θερμοκρασία μεταδίδεται και όχι η θερμοκρασία